



10

Bomen
deel 1

Negende college

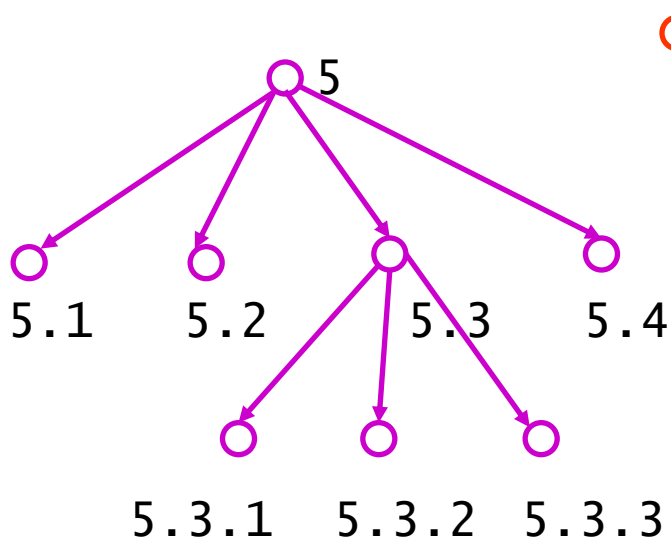
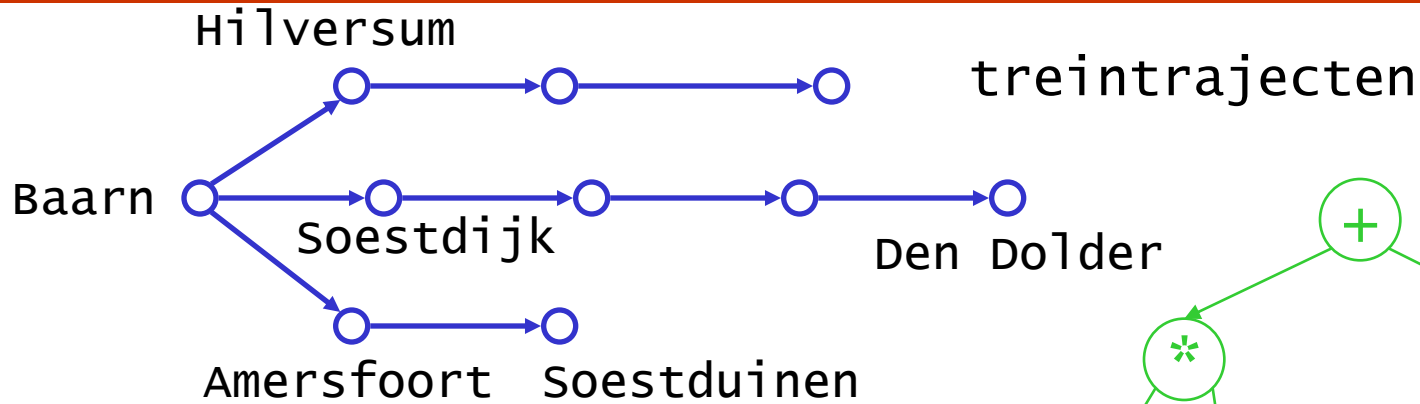
§8.8 ongerichte bomen

§9.4 gerichte bomen

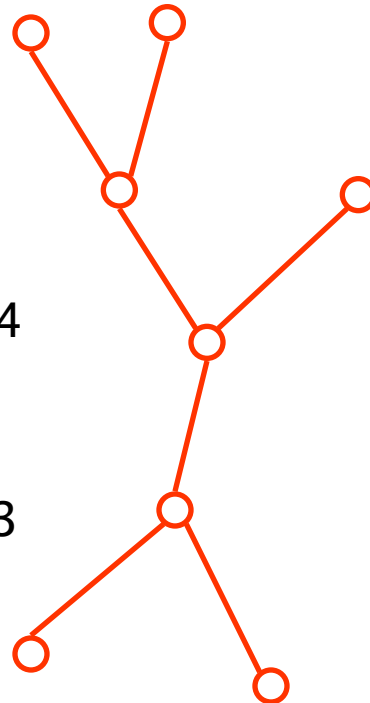
ch 10. binaire bomen

Er zijn drie verschillende typen bomen, die in Schaum over verschillende hoofdstukken verdeeld staan.

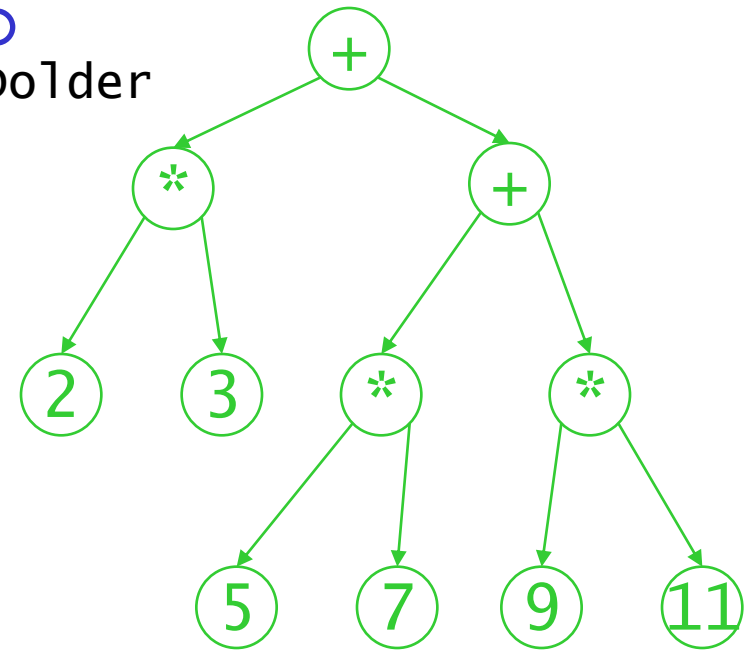
gericht, met een beginpunt, de wortel
ongericht, zonder specifiek begin,
binair, waar links en rechts onderscheiden worden [dat is voor informatici een zeer natuurlijk datatype!]



structuur
menu/hoofdstukken

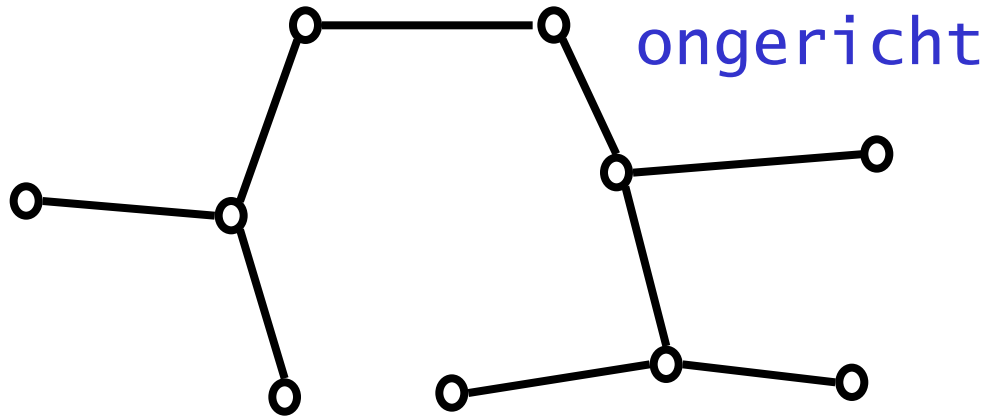


molecuul

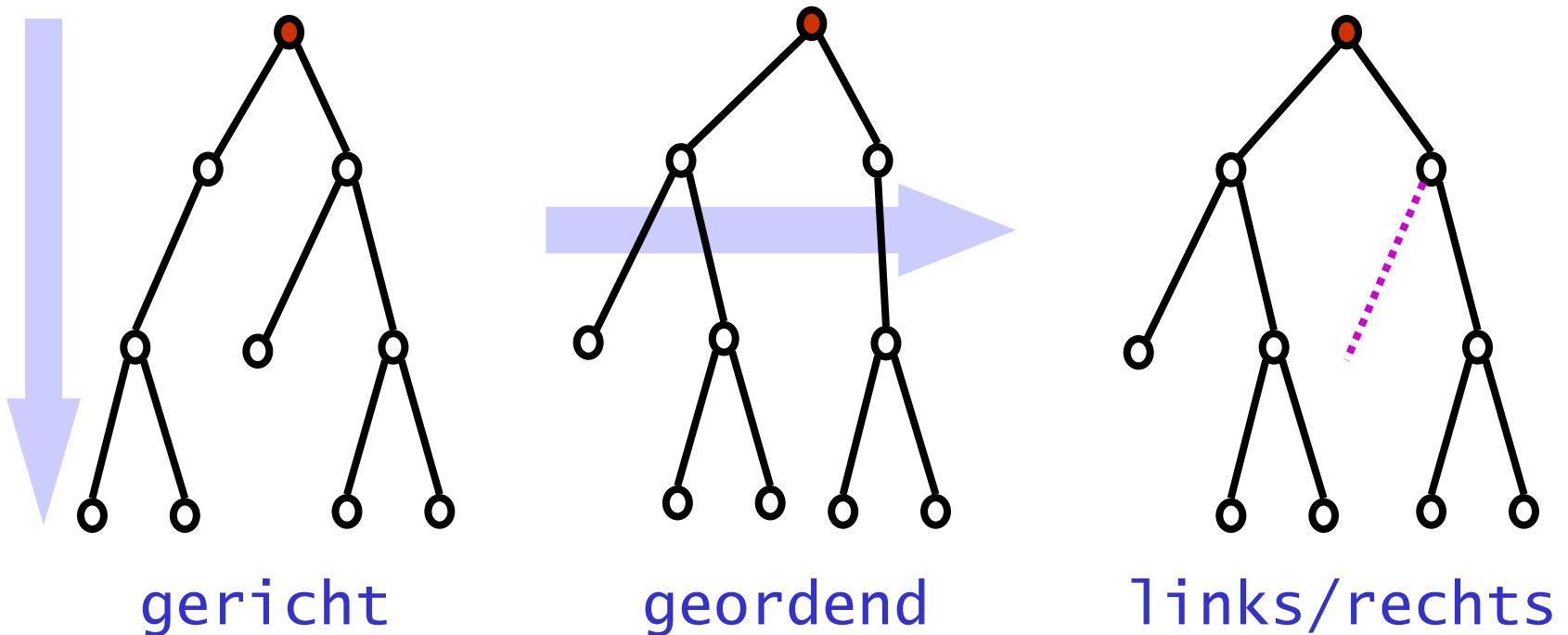


$$(2*3)+((5*7)+(9*11))$$

expressieboom



§8.8 tree graphs
§9.4 rooted trees
ch.10 binary trees



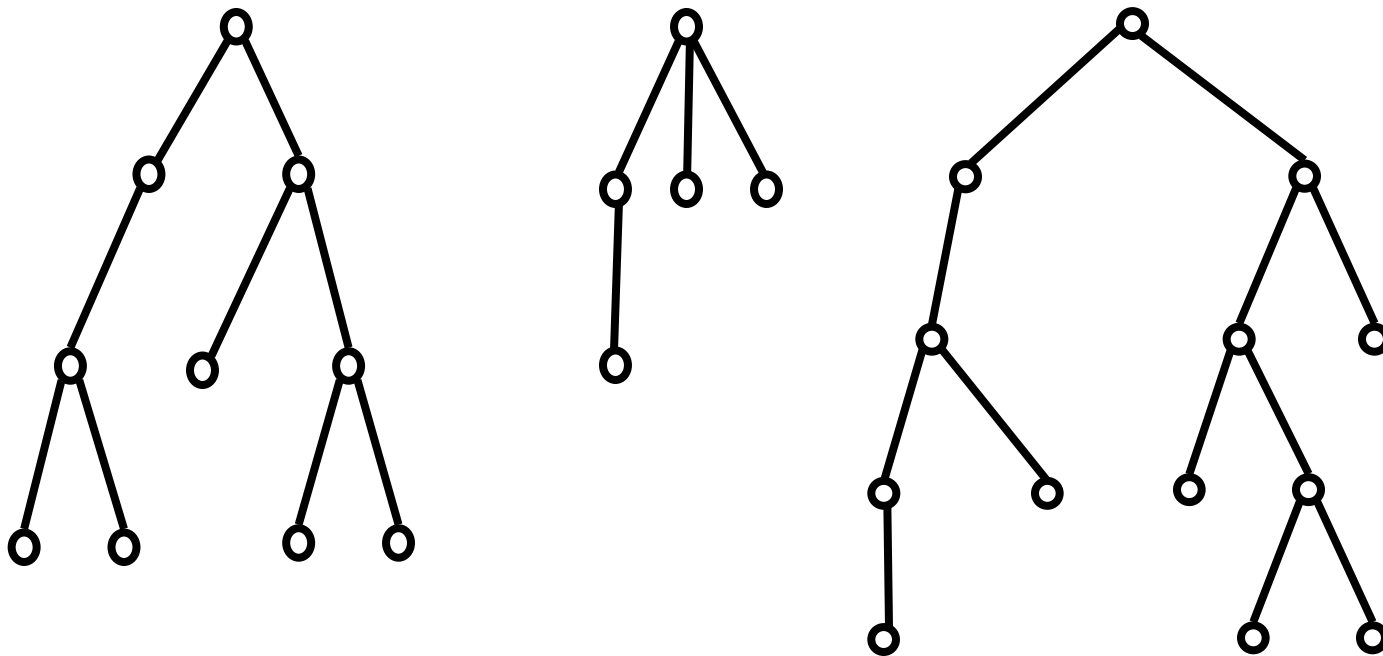
Een *boom* is een samenhangende
ongerichte graaf zonder cykels

§8.8 tree graphs

Een *gewortelde boom* heeft een speciaal
punt (de *wortel*), en daarmee een
richting (vanuit de wortel)

§9.4 rooted trees

Een *bos** is een ongerichte graaf zonder cykels; het is immers een collectie bomen (hieronder als *gewortelde bomen* getekend)



*i.h.a. dus niet samenhangend

Definitie

Samenhangend: tussen elk tweetaal punten is er *een* simpel pad[†]

Bewering

Samenhangend en acyclisch: tussen elk tweetaal punten is er *één* simpel pad

Bewijs: stel dat er twee verschillende simpele paden van u naar v zijn, dan heeft de graaf een cykel^{††} (opgave 32).

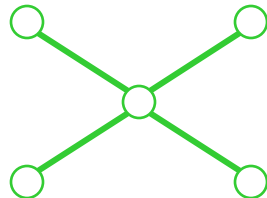
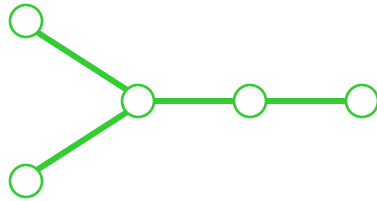
Tegenspraak

[†] **simpel pad**: verschillende knopen

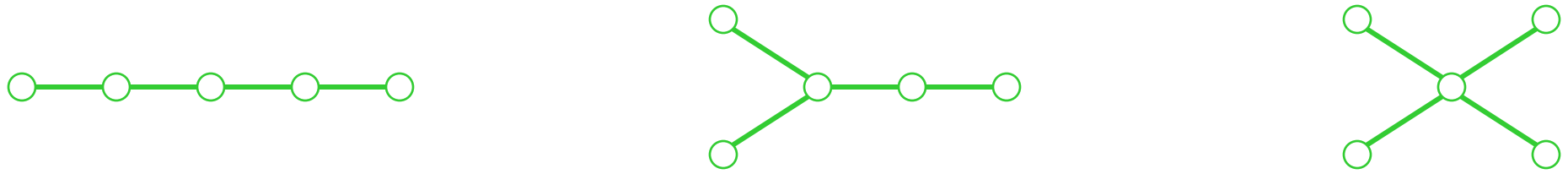
^{††} **cykel**: gesloten, verschillende knopen behalve eindpunten

bomen met 5 knopen

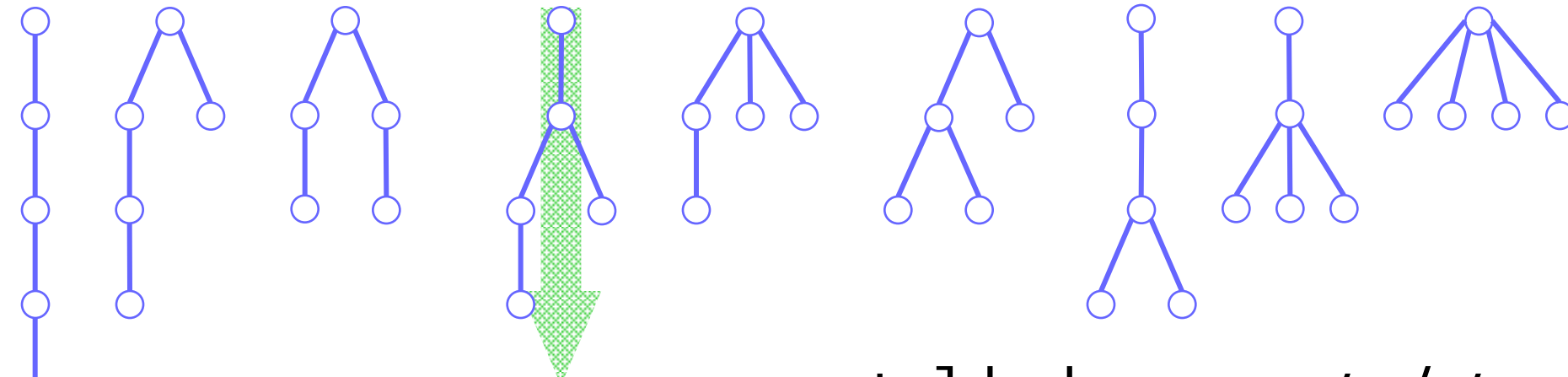
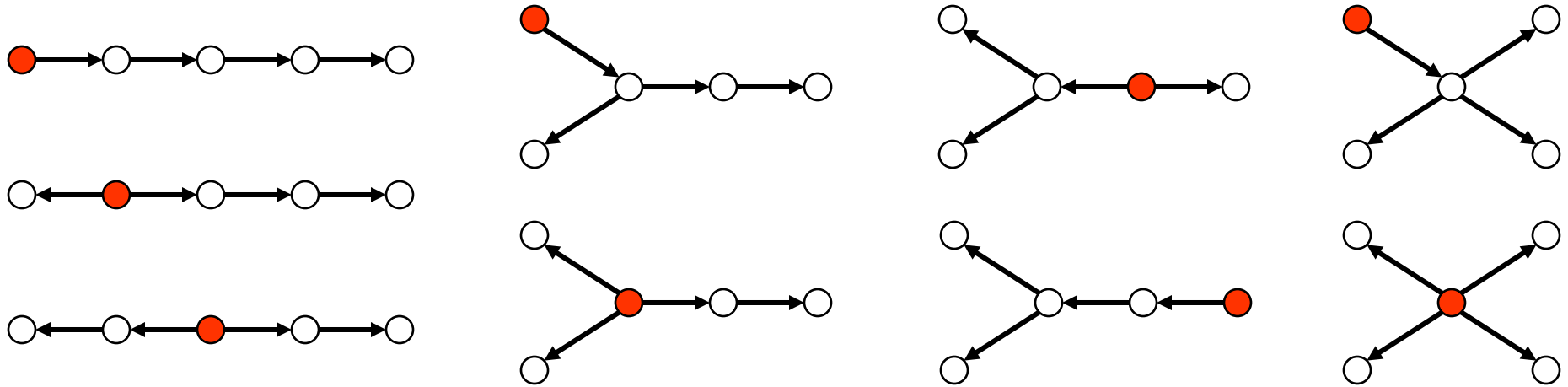
Er zijn 3 niet-isomorfe *samenhangende* grafen *zonder cykels* (= bomen) met 5 knopen



8.8 (ongerichte) boom:

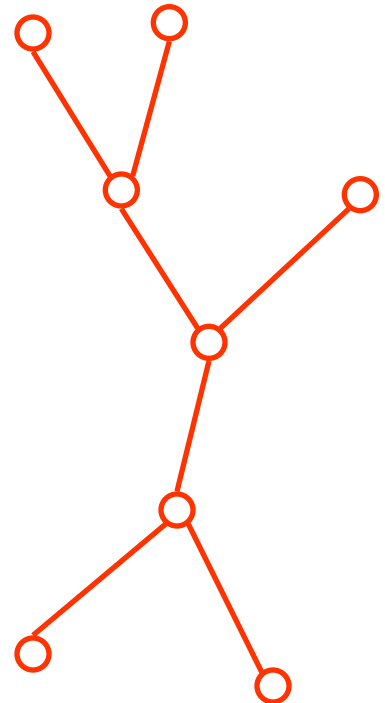
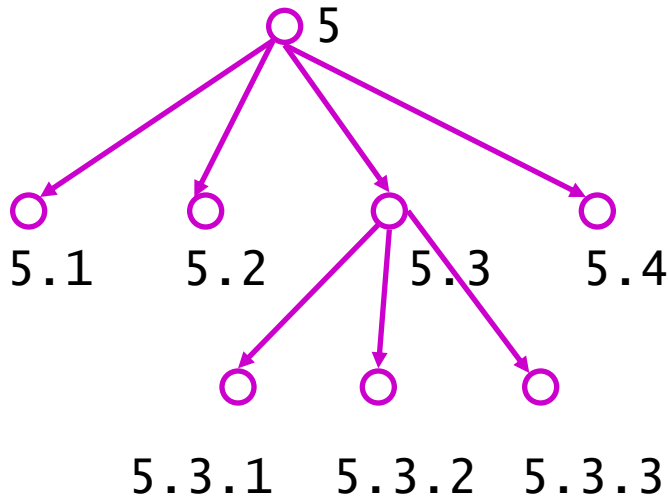
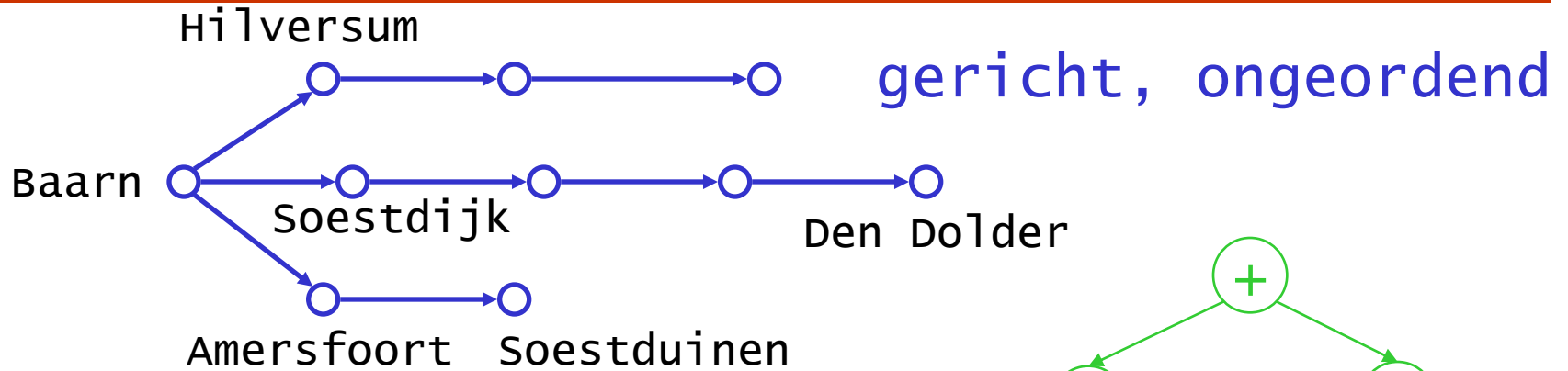


9.4 (gerichte) boom: kies wortel

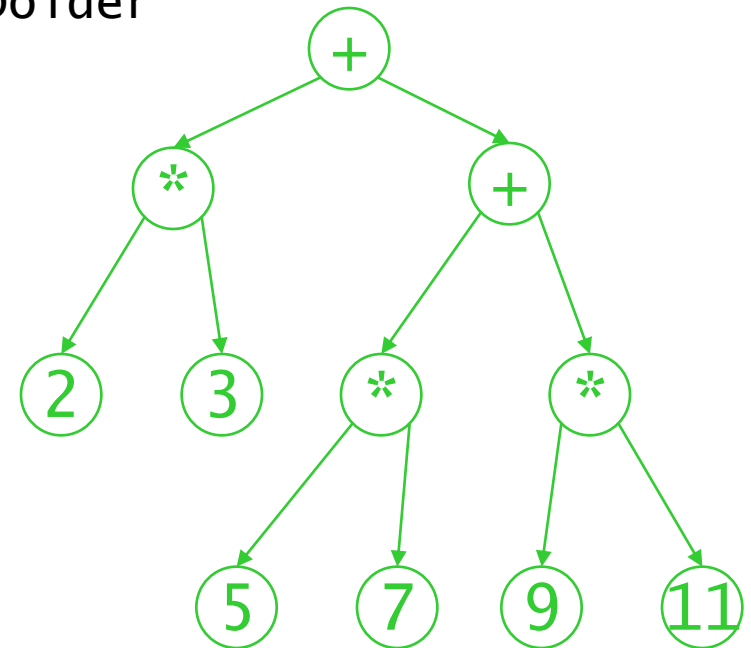


gewortelde boom *rooted tree*

voorbeeldbomen



ongericht



gericht, geordend
of binaire boom



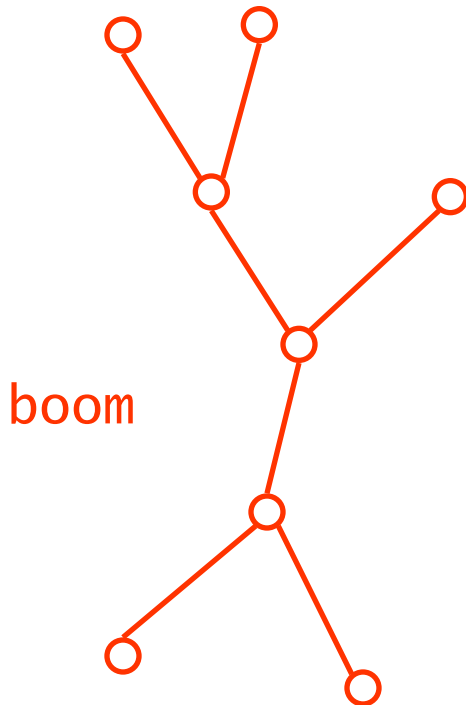
bomen: begrippen

bomentermiologie

knoop (punt):

- blad (punt met graad 1)
- interne knoop

tak (lijn)



wortel

kind

vader / ouder

broer

nakomeling

voorouder

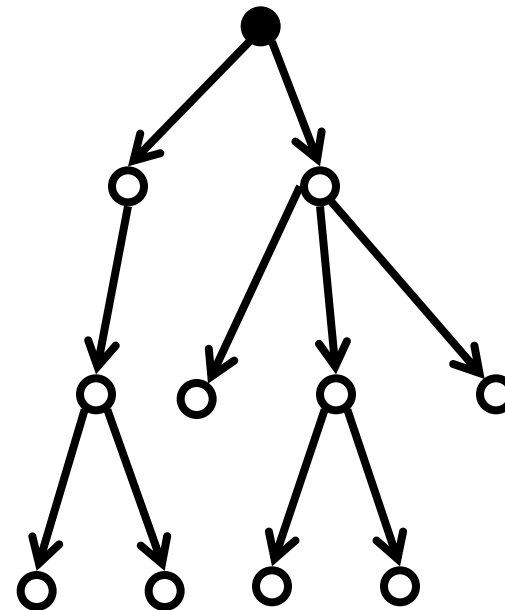
beginpunt

benedenbuur

bovenbuur

opvolger

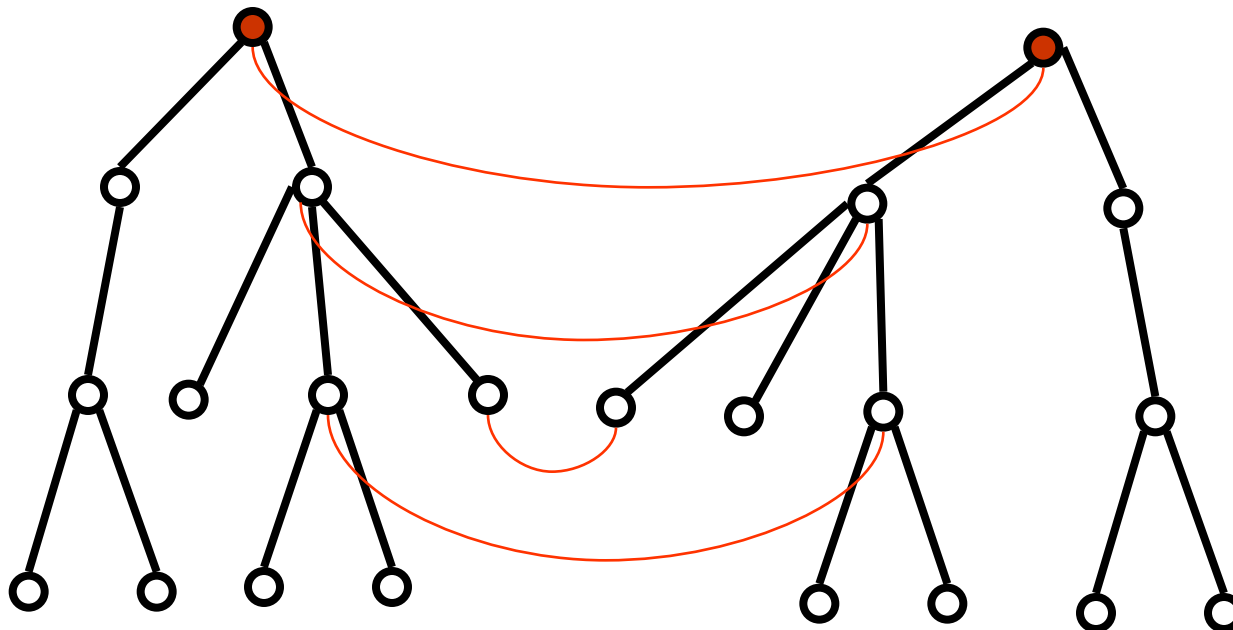
voorganger



gewortelde*
boom

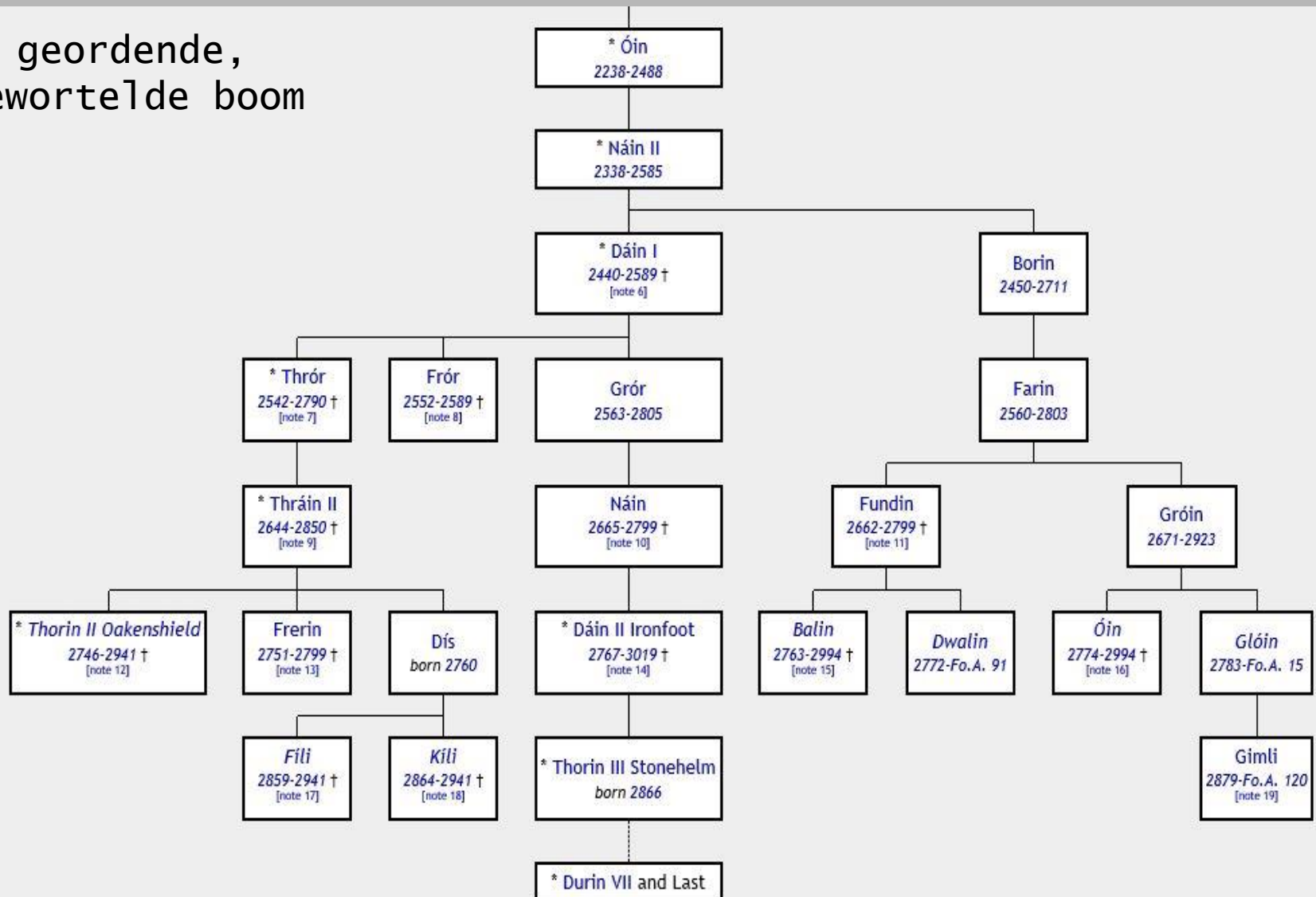
*ook wel: georiënteerde boom

Bij geordende, gewortelde bomen is sprake van een ordening van de kinderen: we spreken van eerste (oudste) kind, tweede kind, etc.



Deze twee gewortelde bomen zijn als ongeordende bomen gelijk/isomorf, maar als geordende bomen niet.

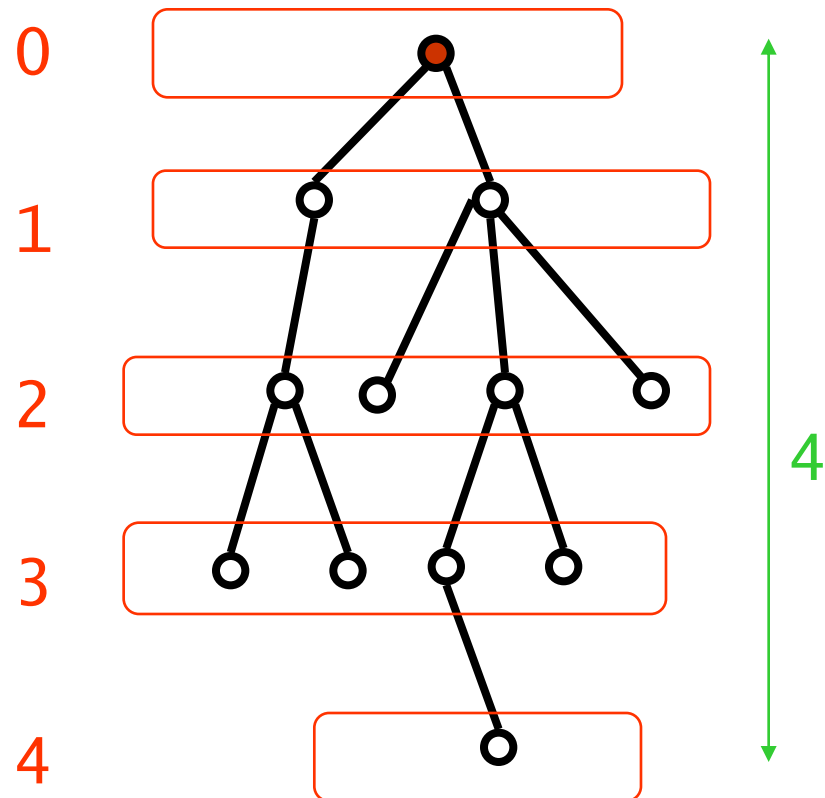
geordende,
gewortelde boom



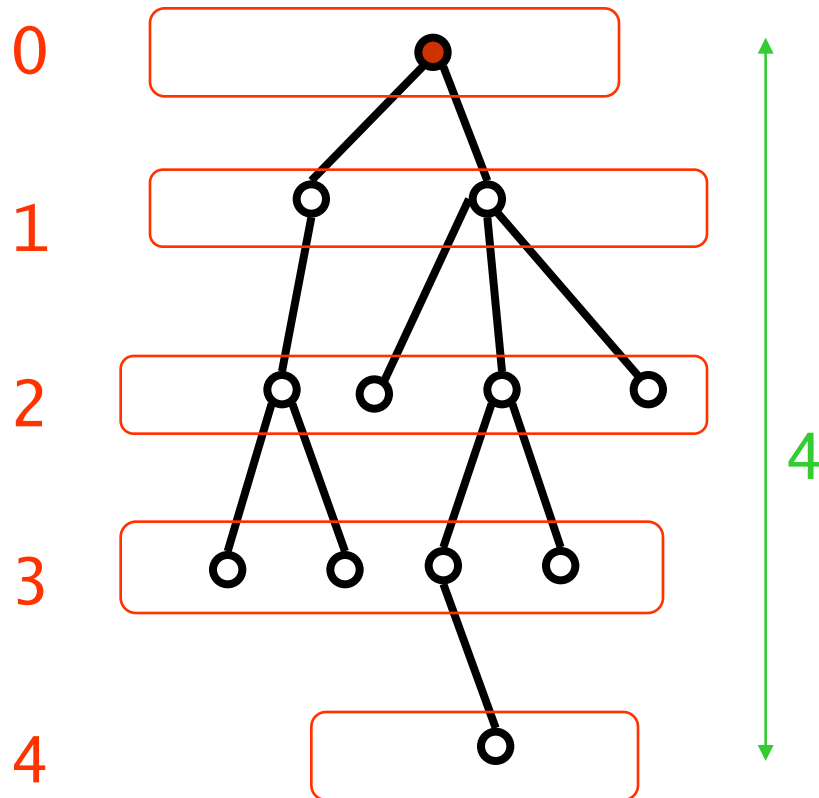
diepte / hoogte van een knoop v = lengte
pad van wortel naar v

nivo (*level*)

hoogte / diepte
van de boom:
grootste nivo
dat voorkomt



diepte / hoogte
nivo *level*

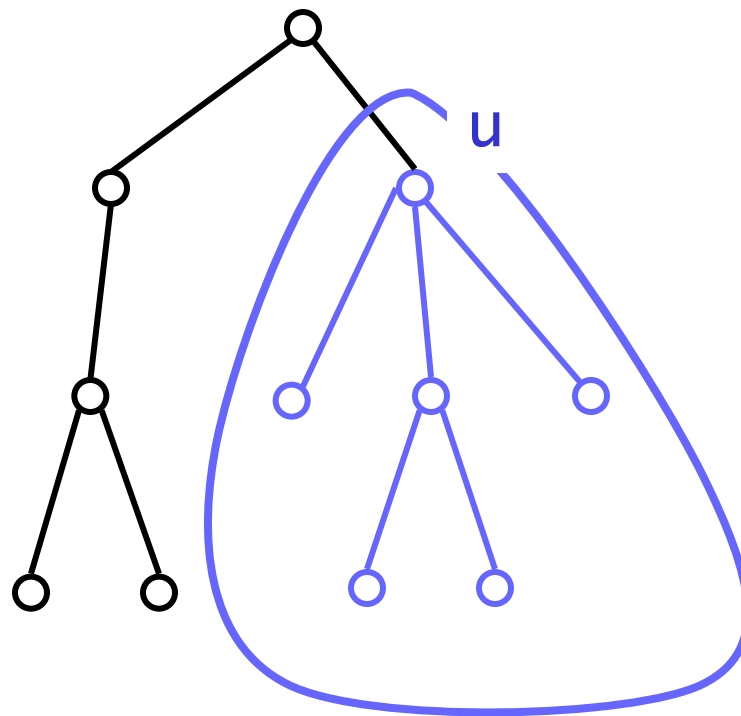


Technisch is er verschil tussen diepte en hoogte: je kunt van elke knoop kijken hoe ver die van de wortel af ligt, maar ook hoe ver van het verste blad.

Normaliter wordt gerekend vanaf de wortel.

Merk op: wanneer we het hebben over de wortel of nakomelingen of ... gaat het altijd over een gewortelde boom

Zij $T = (V, E)$ een boom en u een knoop in T . Dan is T_u de *deelboom (subboom)* van T bestaande uit u , al zijn nakomelingen en alle pijlen tussen deze punten.





bomen: eigenschappen

Een *boom* is een samenhangende
ongerichte graaf zonder cykels;

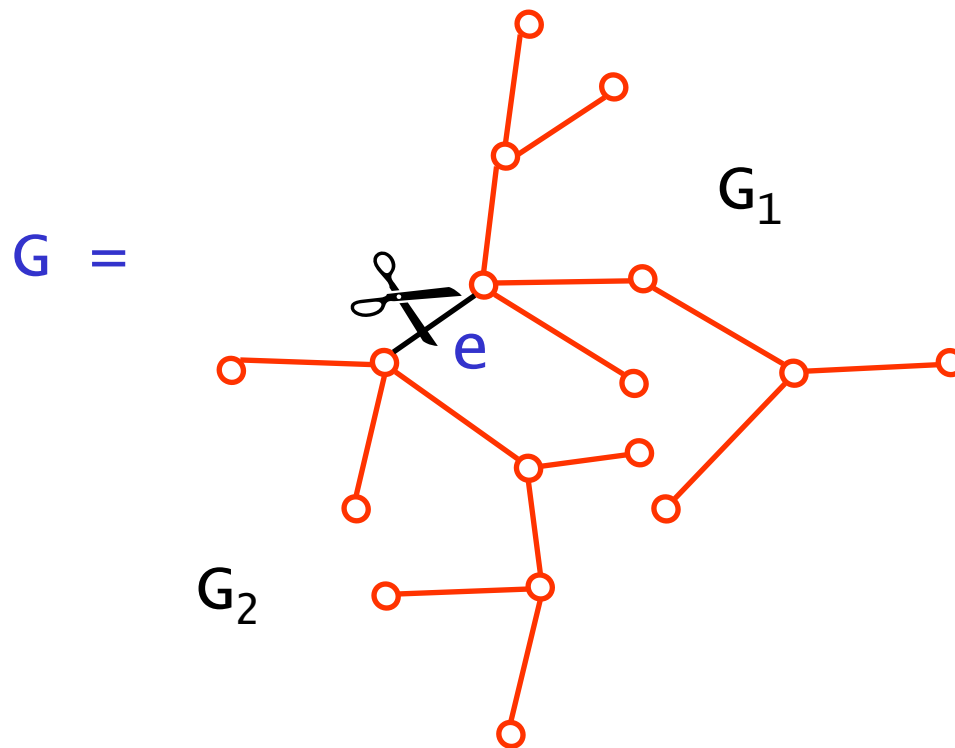
§8.8 tree graphs

Een *gewortelde boom* heeft een speciaal
punt (de *wortel*), en daarmee een
richting (vanuit de wortel)

§9.4 rooted trees

Laat $G = (V, E)$ een boom zijn met $n > 1$ knopen en e een willekeurige tak, dan is $G - \{e\}$ niet meer samenhangend.

G is minimaal samenhangend



$G - \{e\}$ bestaat uit twee samenhangscomponenten die beide weer bomen zijn (want geen cykels)

Het aantal takken van een [ongerichte]* boom $T = (V, E)$ is één minder dan het aantal knopen van T : $|E| = |V| - 1$.

V(ertices)
E(dges)

*De stelling geldt voor bomen in het algemeen, dus zowel voor ongerichte bomen als voor gewortelde bomen als voor binaire bomen.

Opmerking: een boom noteren we meestal als T in plaats van G .

Het aantal takken van boom $T = (V, E)$ is één minder dan het aantal knopen van T :

$$|E| = |V| - 1.$$

Bewijs (*inductie naar het aantal knopen*)

- basis: enkele knoop

- inductiestap

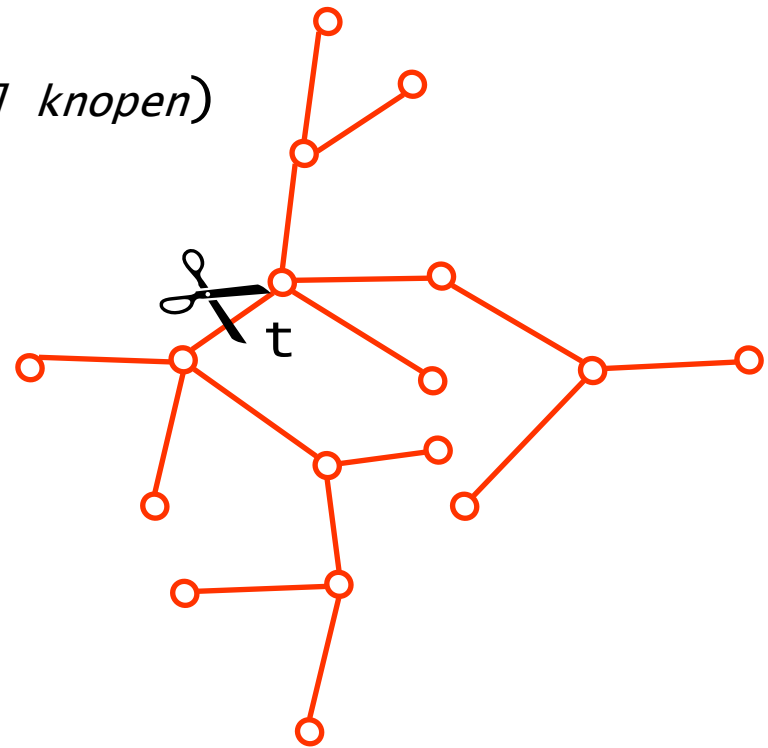
$$|E_1| = |V_1| - 1$$

$$|E_2| = |V_2| - 1$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{t\} \quad V = V_1 \cup V_2$$

optellen:

$$|E| - 1 = |V| - 2$$



College volgende week:

dinsdag 13 november,

13.30 – 15.15 in zaal E004 (Steenis)

Werkcollege deze week:

vrijdag 9 november,

9.00 – 10.45 in Snelliuszalen 402, 405



COLLEGEWEEK 47 (19/11 t/m 23/11)

Geen college op dinsdag, wel op vrijdag:

9.15 – 11.00 Snellius, zaal 407-409

Dus college in plaats van werkcollege